

CURS 14 APLICAȚII LINIARE ORTOGONALE ȘI AUTOADJUNCTE

Cadrul de lucru este \mathcal{V}_n , un spațiu liniar euclidian finit dimensional, orientat.

1. OPERATORUL LINIAR ADJUNCT AL UNUI MORFISM DE SPAȚII LINIARE (FACULTATIV)

Deoarece atât aplicațiile liniare ortogonale, cât și cele autoadjuncte (simetrice) se pot caracteriza cu ajutorul operatorului adjunct, îl vom defini și vom prezenta un minim de proprietăți ale sale, utile ulterior în demonstrarea proprietăților morfismelor ortogonale și simetrice.

Lemma 1. (lema de reprezentare a lui Riesz) Fie \mathcal{V} un spațiu liniar euclidian finit dimensional și $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ o formă liniară. Atunci există un unic $\bar{u} \in \mathcal{V}$ astfel încât

$$\varphi(\bar{v}) = \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle, \quad \forall \bar{v} \in \mathcal{V}.$$

Fie $(\mathcal{V}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$, $(\mathcal{V}_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ două spații liniare euclidiene și $T : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ un morfism de spații liniare.

Fixăm arbitrar vectorul $\bar{w} \in \mathcal{V}_2$. Considerăm forma liniară $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(\bar{v}) = \langle T(\bar{v}), \bar{w} \rangle_2$, $\forall \bar{v} \in \mathcal{V}_1$.

Din lema lui Riesz rezultă că există un unic vector în \mathcal{V}_1 , pe care îl notăm $T^*(\bar{w})$, astfel încât $\varphi(\bar{v}) = \langle \bar{v}, T^*(\bar{w}) \rangle_1$ $\forall \bar{v} \in \mathcal{V}_1$ \Leftrightarrow

$$\langle T(\bar{v}), \bar{w} \rangle_2 = \langle \bar{v}, T^*(\bar{w}) \rangle_1 \quad \forall \bar{v} \in \mathcal{V}_1.$$

Definition 2. Fie $(\mathcal{V}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$, $(\mathcal{V}_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ două spații liniare euclidiene și $T : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ un morfism de spații liniare. Aplicația adjunctă a lui T , este aplicația $T^* : \mathcal{V}_2 \rightarrow \mathcal{V}_1$ care asociază oricărui vector $\bar{w} \in \mathcal{V}_2$ unicul vector $T^*(\bar{w})$ definit anterior.

$$\langle T(\bar{v}), \bar{w} \rangle_2 = \langle \bar{v}, T^*(\bar{w}) \rangle_1 \quad \forall \bar{v} \in \mathcal{V}_1, \forall \bar{w} \in \mathcal{V}_2.$$

Proposition 3. Dacă $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$, atunci $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_2, \mathcal{V}_1)$.

Proof. Fie $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{w}_1, \bar{w}_2 \in \mathcal{V}_2$ arbitrari.

Atunci pentru orice $\bar{v} \in \mathcal{V}_1$, avem $\langle \bar{v}, T^*(\alpha_1 \bar{w}_1 + \alpha_2 \bar{w}_2) \rangle_1 = \langle T(\bar{v}), \alpha_1 \bar{w}_1 + \alpha_2 \bar{w}_2 \rangle_2 = \alpha_1 \langle T(\bar{v}), \bar{w}_1 \rangle_2 + \alpha_2 \langle T(\bar{v}), \bar{w}_2 \rangle_2 = \alpha_1 \langle \bar{v}, T^*(\bar{w}_1) \rangle_1 + \alpha_2 \langle \bar{v}, T^*(\bar{w}_2) \rangle_1 = \langle \bar{v}, \alpha_1 T^*(\bar{w}_1) + \alpha_2 T^*(\bar{w}_2) \rangle_1$.

Cum \bar{v} e arbitrar, din pozitiva definiție a produsului scalar rezultă $T^*(\alpha_1 \bar{w}_1 + \alpha_2 \bar{w}_2) = \alpha_1 T^*(\bar{w}_1) + \alpha_2 T^*(\bar{w}_2)$. \square

Rezultă imediat că aplicația liniară adjunctă are următoarele proprietăți.

Proposition 4. 1) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$, $\forall T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$.

2) $(\lambda T)^* = \lambda T^*$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall T \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$.

3) $(T^*)^* = T$, $\forall T \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$.

4) $I_{\mathcal{V}}^* = Id_{\mathcal{V}}$, unde $Id_{\mathcal{V}}$ este aplicația liniară identitate pe un spațiu liniar euclidian \mathcal{V} .

5) $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$, $\forall T \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3)$, $\forall S \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$.

6) Dacă A este matricea unui morfism de spații liniare $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ în raport cu bazele ortonormate B_1 a lui \mathcal{V}_1 și B_2 a lui \mathcal{V}_2 , atunci matricea A^* a lui T^* în raport cu bazele B_2, B_1 este transpusa lui A .

$$M_{B_2 B_1}(T^*) = (M_{B_1 B_2}(T))^t.$$

Proof. 6) Fie $B_1 = \{\bar{e}_i\}, i \in \overline{1, n}$, $B_2 = \{\bar{f}_i\}, i \in \overline{1, m}$. Coloana k a lui $M_{B_1 B_2}(T)$ conține coordonatele lui $T(\bar{e}_k)$ în baza B_2 . Deoarece $T(\bar{e}_k) = \sum_{i=1}^m \langle T(\bar{e}_k), \bar{f}_i \rangle_2 \bar{f}_i$, elementul de pe linia j , coloana k a lui $M_{B_1 B_2}(T)$ este $\langle T(\bar{e}_k), \bar{f}_j \rangle_2$.

Analog, pe linia j , coloana k a lui $M_{B_2 B_1}(T^*)$ este $\langle T^*(\bar{f}_k), \bar{e}_j \rangle_1 = \langle \bar{f}_k, T(\bar{e}_j) \rangle_2$, deci coincide cu elementul de pe linia k , coloana j a lui $M_{B_1 B_2}(T)$. \square

Deoarece vom demonstra că aplicațiile ortogonale sunt caracterizate de T izomorfism de spații liniare și $T^* = T^{-1}$, iar cele autoadjuncte sunt caracterizate prin $T = T^*$, ne interesează proprietățile legate de spectrul unor operatori liniari cu aceste proprietăți.

Theorem 5. Fie $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu liniar euclidian de dimensiune finită n și $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$. Atunci au loc următoarele afirmații.

1) Dacă T este automorfism al lui \mathcal{V} și $T^* = T^{-1}$, atunci toate rădăcinile caracteristice ale lui T au modulul 1.

2) Dacă $T^* = T$, atunci toate rădăcinile caracteristice ale lui T sunt reale. (în consecință T admite cel puțin o valoare proprie.)

Proof. Fie A matricea lui T în raport cu o bază ortonormată. Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ o rădăcină caracteristică a lui T . Deci $\det(A - \lambda I_n) = 0$, rezultă că sistemul $AU = \lambda U$ admite cel puțin o soluție nebanală, fie ea $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$.

Notăm cu $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ și $\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \dots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$ matricea conjugată lui X . Avem $AX = \lambda X$, deci $A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$.

1) Dacă T este automorfism al lui \mathcal{V} , atunci matricea lui T^{-1} este A^{-1} . Deci $T^* = T^{-1} \Leftrightarrow A^t = A^{-1}$.

$(AX)^t(A\bar{X}) = (\lambda X^t)(\bar{\lambda}\bar{X}) \Leftrightarrow (X^t A^{-1})(A\bar{X}) = (\lambda\bar{\lambda})(X^t\bar{X}) \Leftrightarrow (1 - |\lambda|^2)(X^t\bar{X}) = 0 \Rightarrow |\lambda| = 1$. Am folosit $\bar{x} \neq 0$, deci $X^t\bar{X} = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \neq 0$.

2) Dacă $T^* = T \Rightarrow A^t = A$. $(AX)^t\bar{X} = (\lambda X)^t\bar{X} \Leftrightarrow X^t(A\bar{X}) = \lambda(X^t\bar{X}) \Leftrightarrow X^t(\bar{\lambda}\bar{X}) = \lambda(X^t\bar{X}) \Leftrightarrow (\bar{\lambda} - \lambda)(X^t\bar{X}) = 0 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$. \square

2. APLICAȚII LINIARE ORTOGONALE

Definition 6. Fie $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ două spații liniare euclidiene. Aplicația $T : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ se numește transformare *ortogonală* dacă păstrează produsul scalar a oricăror doi vectori, adică

$$\langle T(\bar{u}), T(\bar{v}) \rangle_2 = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle_1, \forall \bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{V}_1.$$

Să demonstrăm că această condiție din definiția anterioară este suficientă ca o aplicație ortogonală să fie liniară.

Proposition 7. 1) Orice aplicație ortogonală este aplicație liniară.

2) Aplicația $T : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ este ortogonală dacă și numai dacă este aditivă: $T(\bar{u} + \bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$, $\forall \bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{V}_1$ și păstrează norma vectorilor: $\|T(\bar{u})\|_2 = \|\bar{u}\|_1$, $\forall \bar{u} \in \mathcal{V}_1$.

3) Aplicația $T : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ este ortogonală dacă și numai dacă $\|T(\bar{u}) - T(\bar{v})\|_2 = \|\bar{u} - \bar{v}\|_1$, $\forall \bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{V}_1$ și $T(\bar{0}) = \bar{0}$.

Proof. 1) Pentru simplitatea scrierii nu mai punem indicii 1, 2.

Fie $T : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ cu proprietatea $\langle T(\bar{u}), T(\bar{v}) \rangle = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$, $\forall \bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{V}_1$.

Făcând $\bar{u} = \bar{v} \Rightarrow \|T(\bar{u})\| = \|\bar{u}\|$, $\forall \bar{u} \in \mathcal{V}_1$.

$E := \|T(\bar{u} + \bar{v}) - T(\bar{u}) - T(\bar{v})\|^2 = \|T(\bar{u} + \bar{v})\|^2 + \|T(\bar{u})\|^2 + \|T(\bar{v})\|^2 - 2\langle T(\bar{u} + \bar{v}), T(\bar{u}) \rangle$

$- 2\langle T(\bar{u} + \bar{v}), T(\bar{v}) \rangle + 2\langle T(\bar{u}), T(\bar{v}) \rangle$

$\Leftrightarrow E = \|\bar{u} + \bar{v}\|^2 + \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 - 2\langle \bar{u} + \bar{v}, \bar{u} \rangle - 2\langle \bar{u} + \bar{v}, \bar{v} \rangle + 2\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0 \Rightarrow T(\bar{u} + \bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$, $\forall \bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{V}_1$. Deci T este aditivă.

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$, $\bar{u} \in \mathcal{V}_1$ arbitrari. $\|T(\alpha\bar{u}) - \alpha T(\bar{u})\|^2 = \|T(\alpha\bar{u})\|^2 + \|\alpha T(\bar{u})\|^2 - 2\langle T(\alpha\bar{u}), \alpha T(\bar{u}) \rangle = \|\alpha\bar{u}\|^2 + \alpha^2\|\bar{u}\|^2 - 2\alpha^2\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = 0$. Deci T este omogenă.

2) Implicația directă a fost deja demonstrată.

Reciproc, să presupunem că $\|T(\bar{u})\| = \|\bar{u}\|$, $\forall \bar{u} \in \mathcal{V}_1$ și T aditivă.

Atunci $\|T(\bar{u} + \bar{v})\|^2 = \|\bar{u} + \bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + 2\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle + \|\bar{v}\|^2 = \|T(\bar{u})\|^2 + 2\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle + \|T(\bar{v})\|^2$, $\forall \bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{V}_1$.

Deoarece T e aplicație aditivă, deducem

$\|T(\bar{u} + \bar{v})\|^2 = \|T(\bar{u}) + T(\bar{v})\|^2 = \|T(\bar{u})\|^2 + 2\langle T(\bar{u}), T(\bar{v}) \rangle + \|T(\bar{v})\|^2$, $\forall \bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{V}_1$.

Din cele două relații obținem că $\langle T(\bar{u}), T(\bar{v}) \rangle = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$, $\forall \bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{V}_1$, deci T este ortogonală.

3) Se demonstrează similar. \square

Proposition 8. 1. O aplicație liniară între două spații liniare euclidiene finit dimensionale este ortogonală dacă și numai dacă matricea sa $A = (a_{ij})_{i \in \overline{1, n}, j \in \overline{1, m}}$ în raport cu două baze ortonormate oarecare satisface $\sum_{r=1}^m a_{ri}a_{rj} = \delta_{ij}$, $\forall i, j \in \overline{1, n}$. În particular, un endomorfism al unui spațiu liniar euclidian finit dimensional este aplicație ortogonală dacă și numai dacă matricea sa în raport cu o bază ortonormată este ortogonală.

Proof. Fie $B_1 = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ și $B_2 = \{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m\}$ două baze ortonormate în \mathcal{V}_1 , respectiv \mathcal{V}_2 alese arbitrar. Fie $A = (a_{ij})_{i \in \overline{1, n}, j \in \overline{1, m}}$ matricea unei aplicații liniare $T : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ în raport cu aceste baze.

Avem $\langle T(\bar{e}_i), T(\bar{e}_j) \rangle_2 = \langle \sum_{r=1}^m a_{ri}\bar{f}_r, \sum_{s=1}^m a_{sj}\bar{f}_s \rangle_2 = \sum_{r,s=1}^m a_{ri}a_{sj}\delta_{rs} = \sum_{r=1}^m a_{ri}a_{rj}$.

De asemenea, $\langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle_1 = \delta_{ij}$.

Deci $\langle T(\bar{e}_i), T(\bar{e}_j) \rangle_2 = \langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle_1 \Leftrightarrow \sum_{r=1}^m a_{ri}a_{rj} = \delta_{ij}$, $\forall i, j \in \overline{1, n}$.

Dacă cele două spații liniare coincid, avem $m = n$ și o singură bază ortonormată, iar relația anterioară caracterizează faptul că A este ortogonală. \square

Observăm că bazele ortonormate de mai sus sunt arbitrare, deci dacă rezultatul are loc în raport cu o bază ortonormată particulară, el are loc în raport cu orice altă bază ortonormată. Putem deduce acest lucru și folosind formula schimbării matricei unei aplicații liniare în raport cu două baze ortonormate diferite.

Corollary 9. Matricea unui endomorfism ortogonal în raport cu o bază ortonormată are determinantul ± 1 .

Definition 10. Un endomorfism ortogonal se numește de *specia I* dacă determinantul matricii asociate în raport cu o bază ortonormată este $+1$. În caz contrar se numește de *specia a II-a*.

Theorem 11. Mulțimea endomorfismelor ortogonale ale spațiului liniar euclidian \mathcal{V}_n finit dimensional formează un grup în raport cu compunerea aplicațiilor, notat $\mathcal{O}(\mathcal{V})$ și numit *grupul ortogonal* al spațiului liniar euclidian \mathcal{V} . Pentru orice fixare a unei baze ortonormate în spațiul liniar euclidian \mathcal{V} , există un izomorfism între $\mathcal{O}(\mathcal{V})$ și $\mathcal{O}(n)$, grupul matricelor ortogonale de ordinul $n = \dim \mathcal{V}$.

Proof. Fie $f, g \in \mathcal{O}(\mathcal{V})$. Atunci $f \circ g \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ și $\forall \bar{u} \in \mathcal{V}$ avem $\| (f \circ g)(\bar{u}) \| = \| f(g(\bar{u})) \| = \| g(\bar{u}) \| = \| \bar{u} \|$, deci $f \circ g \in \mathcal{O}(\mathcal{V})$.

Elementul neutru la compunerea aplicațiilor este aplicația identitate $Id_{\mathcal{V}}$ care este evident un endomorfism ortogonal.

Să demonstrăm că orice endomorfism ortogonal f al lui \mathcal{V} este injectiv. Fie $\bar{u} \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(\bar{u}) = \bar{0} \Leftrightarrow \| f(\bar{u}) \| = 0 \Leftrightarrow \| \bar{u} \| = 0 \Leftrightarrow \bar{u} = \bar{0}$. Deci $\text{Ker } f = \{\bar{0}\} \Rightarrow f$ este endomorfism injectiv (monomorfism).

Dacă $\dim \mathcal{V} = n < \infty$, atunci $\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = n \Rightarrow \dim(\text{Im } f) = n$, deci $\text{Im } f = \mathcal{V} \Leftrightarrow f$ este endomorfism surjectiv (epimorfism).

Deci f este izomorfism de spații liniare. Să demonstrăm că f^{-1} este endomorfism ortogonal. Într-adevăr, $\| f^{-1}(\bar{u}) \| = \| f(f^{-1}(\bar{u})) \| = \| \bar{u} \|$, $\forall \bar{u} \in \mathcal{V}$.

Izomorfismul de grupuri căutat este aplicația ce asociază fiecărei aplicații liniare ortogonale matricea sa în raport cu o bază ortonormată fixată. \square

Mulțimea endomorfismelor ortogonale de specia I formează un subgrup al grupului $\mathcal{O}(\mathcal{V})$, numit *grupul ortogonal special* (sau al rotațiilor). Evident, mulțimea endomorfismelor ortogonale de specia a II-a nu formează grup în raport cu operația de compunere (aplicația identitate pe \mathcal{V} este de specia I, compunerea a două endomorfisme ortogonale de specia a II-a este un endomorfism ortogonal de specia I).

Theorem 12. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$, \mathcal{V} spațiu liniar euclidian finit dimensional. Atunci $T \in \mathcal{O}(\mathcal{V}) \Leftrightarrow T$ este automorfism al lui \mathcal{V} și $T^* = T^{-1}$.

Proof. Fie $T \in \mathcal{O}(\mathcal{V})$ și T^* operatorul adjunct al lui T . Rezulta $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle T(\bar{u}), T(\bar{v}) \rangle = \langle \bar{u}, (T^* \circ T)(\bar{v}) \rangle$ $\forall \bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{V} \Rightarrow (T^* \circ T)(\bar{v}) = \bar{v}$, $\forall \bar{v} \in \mathcal{V}$. Deoarece orice aplicație ortogonală este izomorfism liniar, rezultă că $T^{-1} = T^*$.

Reciproc, fie $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ automorfism cu $T^* = T^{-1}$. Atunci $\langle T(\bar{u}), \bar{v} \rangle = \langle \bar{u}, T^*(\bar{v}) \rangle = \langle \bar{u}, T^{-1}(\bar{v}) \rangle$, $\forall \bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{V}$. Fie $\bar{u}, \bar{w} \in \mathcal{V}$ arbitrari, în relația anterioară luăm $\bar{v} = T(\bar{w}) \Rightarrow \langle T(\bar{u}), T(\bar{w}) \rangle = \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle$, $\forall \bar{u}, \bar{w} \in \mathcal{V}$. Deci T este aplicație ortogonală. \square

Theorem 13. Rădăcinile caracteristice ale unei aplicații ortogonale sunt toate de modul 1. Dacă λ este valoare proprie a lui $T \in \mathcal{O}(\mathcal{V})$, atunci $\lambda = \pm 1$.

Proof. Putem utiliza teorema anterioară și rezultatul legat de operatorul adjunct din prima secțiune.

Dar să dăm și o demonstrație directă.

Fie $\lambda = a + ib$ o rădăcină caracteristică a lui $T \in \mathcal{O}(\mathcal{V})$, a, b numere reale. Fie A matricea lui T în raport cu o bază B a lui \mathcal{V} . Deci ecuația $AZ = \lambda Z$ admite și soluții nenule în \mathbb{C}^n . Fie $Z = X + iY$ una dintre ele. Deci

$$A(X + iY) = (a + ib)(X + iY) \Rightarrow \begin{cases} AX = aX - bY, \\ AY = aY + bX. \end{cases} \text{ Fie } \bar{x}, \bar{y} \text{ vectorii ce au în baza } B \text{ coordonatele } X, \text{ respectiv } Y.$$

$$\text{Deducem } \begin{cases} T(\bar{x}) = a\bar{x} - b\bar{y}, \\ T(\bar{y}) = a\bar{y} + b\bar{x}. \end{cases}$$

$$\text{Dar } \| \bar{x} \|^2 = \| T(\bar{x}) \|^2 = \| a\bar{x} - b\bar{y} \|^2 = a^2 \| \bar{x} \|^2 + b^2 \| T(\bar{x}) \|^2 - 2ab \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle. \quad \square$$

$$\text{Analog } \| \bar{y} \|^2 = \| T(\bar{y}) \|^2 = \| a\bar{y} + b\bar{x} \|^2 = a^2 \| \bar{y} \|^2 + b^2 \| T(\bar{y}) \|^2 + 2ab \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle.$$

$$\text{Scăzând cele două relații, folosind } \| \bar{x} \|^2 + \| \bar{y} \|^2 \neq 0, \text{ obținem } a^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow |\lambda| = 1.$$

Următorul rezultat va fi util în clasificarea endomorfismelor ortogonale.

Lemma 14. Dacă un endomorfism ortogonal f invariază un subspațiu liniar U , atunci f invariază și ortogonalul acestuia. În plus, restricțiile lui f la U , respectiv U^\perp sunt automorfisme ortogonale.

Proof. Presupunem $U \subset_{s.l} \mathcal{V}$ și $f(U) \subseteq U$. Dar f este bijecție, deci $f(U) = U$ și $f|_U : U \rightarrow U$ e o bijecție. Fie $\bar{x} \in U^\perp$ și $\bar{y} \in U$ oarecare. Deoarece $f|_U : U \rightarrow U$ e o bijecție, rezultă că există $\bar{z} \in U$ a.i. $\bar{y} = f(\bar{z})$. Deci

$\langle f(\bar{x}), \bar{y} \rangle = \langle f(\bar{x}), f(\bar{z}) \rangle = \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle = 0$. Deci $f(\bar{x}) \in U^\perp, \forall \bar{x} \in U^\perp \Rightarrow f(U^\perp) \subset U^\perp$. Restricția lui f la U^\perp este un automorfism ortogonal. \square

Exemple de aplicații ortogonale.

Definiție 15. Fie \mathcal{V}_n un spațiu liniar euclidian orientat n dimensional ($n < \infty$) și W_p un subspațiu liniar al său, p dimensional, $p \in \overline{1, n-1}$.

Fie W^\perp complementul ortogonal al lui W în \mathcal{V} . Se știe că $W \oplus W^\perp = \mathcal{V}$. Atunci $\forall \bar{u} \in \mathcal{V}, \exists! \bar{u}_1 \in W, \exists! \bar{u}_2 \in W^\perp$ a.i. $\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$.

Definim proiecția ortogonală a vectorului \bar{u} pe W prin $Pr_W(\bar{u}) = \bar{u}_1$, iar proiecția ortogonală a vectorului \bar{u} pe W^\perp prin $Pr_{W^\perp}(\bar{u}) = \bar{u}_2$.

Proiecția ortogonală a spațiului liniar euclidian \mathcal{V}_n pe W este aplicația $Pr_W : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ ce asociază fiecărui \bar{u} din W proiecția sa ortogonală pe W , $Pr_W(\bar{u}) = \bar{u}_1$.

Simetria ortogonală a spațiului liniar euclidian \mathcal{V}_n față de W este aplicația definită prin $S_W : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, S_W = 2Pr_W - Id_{\mathcal{V}}$.

Deci $S_W(\bar{u}) = \bar{u}_1 - \bar{u}_2 = Pr_W(\bar{u}) - Pr_{W^\perp}(\bar{u})$.

Theorem 16. Simetria ortogonală a lui \mathcal{V}_n față de subspațiul liniar W_p este endomorfism ortogonal involutiv. Dacă $n - p$ este par, atunci S_W este de specia I, iar dacă $n - p$ este impar, atunci S_W este de specia a II-a.

Proof. Stabilim mai întâi o formulă de calcul pentru $S_W(\bar{u})$.

Fie $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_p\}$ o bază ortonormată pozitivă a lui W și $\{\bar{a}_{p+1}, \bar{a}_{p+2}, \dots, \bar{a}_n\}$ o bază ortonormată a lui W^\perp . Atunci $B = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$ este o bază ortonormată a lui $W \oplus W^\perp = \mathcal{V}$.

Pentru orice $\bar{u} \in \mathcal{V}, \bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2, \bar{u}_1 = Pr_W(\bar{u}) = \sum_{i=1}^p x^i \bar{a}_i, \bar{u}_2 = Pr_{W^\perp}(\bar{u})$. Deci $\bar{u} = \sum_{i=1}^p x^i \bar{a}_i + \bar{u}_2$. Înmulțind scalar această relație respectiv cu $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_p$, folosind $\bar{a}_i \perp \bar{u}_2, \forall i \in \overline{1, p}$, obținem $x^i = \langle \bar{u}, \bar{a}_i \rangle, \forall i \in \overline{1, p}$. Deci

$$(2.1) \quad Pr_W(\bar{u}) = \sum_{i=1}^p \langle \bar{u}, \bar{a}_i \rangle \bar{a}_i, \quad S_W(\bar{u}) = 2 \sum_{i=1}^p \langle \bar{u}, \bar{a}_i \rangle \bar{a}_i - \bar{u}.$$

Din această formulă, folosind faptul că produsul scalar este o aplicație biliniară, rezultă imediat că simetria ortogonală față de W este endomorfism liniar.

$S_W^2(\bar{u}) = S_W(\bar{u}_1 - \bar{u}_2) = S_W(\bar{u}_1) - S_W(\bar{u}_2) = \bar{u}_1 - (-\bar{u}_2) = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 = \bar{u}, \forall \bar{u} \in \mathcal{V}$. Deci $S_W^2 = Id_{\mathcal{V}}$, adică S_W este involutiv.

Să determinăm acum matricea lui S_W în raport cu baza $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$ ortonormată aleasă anterior, adaptată descompunerii $\mathcal{V} = W \oplus W^\perp$.

Deoarece $S_W(\bar{a}_i) = \bar{a}_i, \forall i \in \overline{1, p}$ și $S_W(\bar{a}_i) = -\bar{a}_i, \forall i \in \overline{p+1, n}$, rezultă

$$M_B(S_W) = \begin{pmatrix} I_p & O_{p, n-p} \\ O_{n-p, p} & -I_{n-p} \end{pmatrix},$$

care este o matrice ortogonală. Deci S_W este endomorfism ortogonal. $\det M_B(S_W) = (-1)^{n-p}$, de unde rezultă și specia acestui endomorfism ortogonal, în funcție de paritatea lui $n - p$. \square

Remark. În particular, într-un spațiu liniar euclidian orientat 2 dimensional, \mathcal{V}_2 , considerăm subspațiul liniar 1 dimensional W generat de vectorul unitar \bar{a} . Deci $W = [\bar{a}]$ este o dreaptă vectorială.

Simetria ortogonală în raport cu dreapta vectorială $W = [\bar{a}], \bar{a}$ unitar, sau mai simplu simetria ortogonală axială, este aplicația $S_{\bar{a}} : \mathcal{V}_2 \rightarrow \mathcal{V}_2$, definită prin

$$S_{\bar{a}}(\bar{u}) = 2 \langle \bar{a}, \bar{u} \rangle \bar{a} - \bar{u}, \quad \forall \bar{u} \in \mathcal{V}.$$

Alegând o bază ortonormată pozitivă convenabilă în \mathcal{V} , și anume $\{\bar{a}, \bar{b}\}, \|\bar{b}\| = 1, \bar{b} \perp \bar{a}$, se poate determina matricea simetriei axiale în raport cu aceasta bază: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Deci simetria axială în plan este o transformare ortogonală de specia a II-a.

Se poate demonstra ușor că dacă $B' = \{\bar{i}, \bar{j}\}$ e o bază ortonormată arbitrară,

atunci $M_{B'}(S_{[\bar{a}]}) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$, unde $\theta = \angle_o(\bar{i}, \bar{a})$.

Într-adevăr $\bar{a} = \cos \theta \bar{i} + \sin \theta \bar{j}$, deci $S_{[\bar{a}]}(\bar{i}) = (2 \cos^2 \theta - 1) \bar{i} + 2 \sin \theta \cos \theta \bar{j}, S_{[\bar{a}]}(\bar{j}) = 2 \sin \theta \cos \theta \bar{i} + (2 \sin^2 \theta - 1) \bar{j}$.

Fie $(\mathcal{V}_3, \langle, \rangle)$ un spațiu liniar euclidian orientat. Formula pentru simetria axială $S_{\bar{a}}$ este aceeași.

Fie baza $\{\bar{a}, \bar{b}_1, \bar{b}_2\}$ ortonormată, cu $\bar{b}_1, \bar{b}_2 \in [\bar{a}]^\perp$. Matricea lui $S_{\bar{a}}$ în raport cu această bază este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ deci este un endomorfism ortogonal de specia I.}$$

Simetria ortogonală față de $W = [\bar{a}]^\perp = [\bar{b}_1, \bar{b}_2]$, numită și simetrie planară, este

$$S_W(\bar{u}) = 2 \langle \bar{u}, \bar{b}_1 \rangle \bar{b}_1 + 2 \langle \bar{u}, \bar{b}_2 \rangle \bar{b}_2 - \bar{u}, \quad \forall \bar{u} \in \mathcal{V}.$$

Se poate verifica că $S_W = -S_{\bar{a}}$.

Matricea ei în raport cu baza anterioară este $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, deci este un endomorfism ortogonal de specia

a IIa.

Observăm că în general un operator ortogonal nu este diagonalizabil. Dar dacă este, evident că matricea sa diagonală va avea doar elementele nenule 1, -1. În plus, deoarece vectorii proprii corespunzători valorilor proprii 1 și -1 sunt ortogonali, putem alege baza în raport cu care operatorul are matricea diagonală să fie ortonormată.

Dar cum arată matricea unui operator ortogonal dacă acesta nu este diagonalizabil?

Lemma 17. (facultativ) Orice endomorfism al lui \mathcal{V}_n admite cel puțin un subspațiu invariant de dimensiune 1 sau 2.

Proof. Dacă $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_n)$ are o valoare proprie λ , atunci subspațiul propriu corespunzător ei $U(\lambda) \neq \{\bar{0}\}$ și este invariant prin T . Dacă $\bar{u} \in U(\lambda)$, $\bar{u} \neq \bar{0}$, atunci $[\bar{u}]$ e un subspațiu 1 dimensional, invariant prin T .

Dacă toate rădăcinile caracteristice ale lui T sunt complexe nereale, considerăm una dintre ele, $\lambda = a + ib$. Fie A matricea lui T în raport cu o bază B a lui \mathcal{V} . Deci ecuația $AZ = \lambda Z$ admite și soluții nenule în \mathbb{C}^n . Fie $Z = X + iY$

una dintre ele. Deci $A(X + iY) = (a + ib)(X + iY) \Rightarrow \begin{cases} AX = aX - bY, \\ AY = aY + bX. \end{cases}$ Fie \bar{x}, \bar{y} vectorii ce au în baza B

coordonatele X , respectiv Y . Deducem $\begin{cases} T(\bar{x}) = a\bar{x} - b\bar{y}, \\ T(\bar{y}) = a\bar{y} + b\bar{x}. \end{cases}$ Se demonstrează prin reducere la absurd că \bar{x}, \bar{y} sunt

liniar independenți și deci $[\bar{x}, \bar{y}]$ este un subspațiu 2 dimensional invariant prin T . □

3. ENDOMORFISME AUTOADJUNCTE (FACULTATIV)

Definition 18. Fie \mathcal{V} un spațiu liniar euclidian finit dimensional. Endomorfismul $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ se numește autoadjunct sau simetric dacă $\langle T(\bar{x}), \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, T(\bar{y}) \rangle$, $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{V}$.

Remark 19. $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ este autoadjunct $\Leftrightarrow T^* = T$.

Corollary 20. 1) Un endomorfism $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ este autoadjunct \Leftrightarrow matricea sa în raport cu o bază ortonormată este simetrică.

2) Toate rădăcinile caracteristice ale unui endomorfism autoadjunct sunt reale. Deci un astfel de endomorfism are cel puțin o valoare proprie.

Example 21. Proiecția ortogonală pe un subspațiu liniar și simetria ortogonală față de un subspațiu liniar sunt endomorfisme simetrice.

Proposition 22. Vectorii proprii ai unui endomorfism simetric, corespunzători unor valori proprii distincte, sunt ortogonali.

Proof. Fie $\lambda \neq \nu$ valori proprii distincte, \bar{x} vector propriu corespunzător lui λ , \bar{y} vector propriu corespunzător lui ν . Atunci $\langle T(\bar{x}), \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, T(\bar{y}) \rangle \Leftrightarrow (\lambda - \nu) \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0$. □

Proposition 23. Dacă un endomorfism simetric f invariază un subspațiu liniar U , atunci f invariază și ortogonalul acestuia. În plus, restricția lui f la U , respectiv U^\perp este un endomorfism simetric.

Proof. Fie $U \subset_l \mathcal{V}$ a.i. $f(U) \subset U$. Fie $\bar{x} \in U^\perp$ și $\bar{y} \in U$ arbitrar. Avem $\langle f(\bar{x}), \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, f(\bar{y}) \rangle = 0$, deoarece $\bar{x} \in U^\perp$, $f(\bar{y}) \in U$. Deci $f(\bar{x}) \perp \bar{y}$, $\forall \bar{y} \in U \Rightarrow f(\bar{x}) \in U^\perp$. Am demonstrat astfel $f(U^\perp) \subset U^\perp$. Restul este evident. □

Theorem 24. Pentru orice endomorfism simetric există o bază ortonormată formată din vectori proprii, în raport cu care matricea acestuia este diagonală.

Proof. Deoarece endomorfismului simetric f are cel puțin o valoare proprie, alegem un vector propriu arbitrar corespunzător acesteia și îl normăm. Îl notăm cu \bar{e}_1 . Deci $[\bar{e}_1]$ este invariant prin f . Din propoziția anterioară rezultă că f invariază și $V_1 = [\bar{e}_1]^\perp$ și $f|_{V_1}$ este endomorfism simetric. Acesta admite și el cel puțin o valoare proprie. Fie \bar{e}_2 un vector propriu al lui $f|_{V_1}$, unitar. $\bar{e}_2 \in V_1 \Rightarrow \bar{e}_2 \perp \bar{e}_1$. Fie $V_2 = [\bar{e}_1, \bar{e}_2]^\perp$. Analog $f(V_2) \subset V_2$ și $f|_{V_2}$ este simetric. Deci și el admite un vector propriu unitar. Observăm că $\dim V_i = n - i$, deci după n pași, continuând procedeul, obținem n vectori proprii unitari, mutual ortogonali, deci liniar independenți. Deoarece $\dim \mathcal{V} = n$, rezultă că aceștia formează o bază ortonormată a lui \mathcal{V} și evident matricea lui f în această bază este diagonală.

□

REFERENCES

- [1] S. Axler, Linear algebra done right, Springer, Undergraduate Texts in Mathematics, 2015
- [2] L. Ornea, A. Turtoi, O introducere în geometrie, Theta, București, 2011
- [3] I. Pop, Ghe. Neagu, Algebră liniară și geometrie analitică în plan și în spațiu, Plumb, Bacău, 1996